

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

경영·경제분석을 위한 핵심 수학(6판)

연습문제 풀이 이용 안내

- 본 문제 풀이의 저작권은 원서 저작권자(Knut Sydsæter, Arne Strøm, Peter Hammond, Andrés Carvajal)와 Pearson, 한빛아카데미(주)에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 최고 5년 이하의 징역 또는 5천만원 이하의 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(併科)할 수도 있습니다.

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.1 2차 행렬식

1.

(a) 18

(b) 0

(c) $x^2 - 2x + 8$

(d) $4ab$

(e) 6^{t-1}

2.

두 벡터 $\mathbf{a} = (3, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 6)$ 을 이웃 변으로 하는 평행사변형의 넓이

3.

(a) $x = \frac{11}{5}, y = -\frac{7}{5}$

(b) $x = 4, y = -1$

(c) $x = \frac{a+2b}{a^2+b^2}, y = \frac{2a-b}{a^2+b^2}$

4.

$a = -1, b = 3$

5.

$x = -2, 4$

6.

증명 생략

7.

$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8.

$Y = \frac{a + I_0 + G_0}{1-b}, C = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1-b}$

9.

(a) $M_1 = X_2$ 은 국가 1의 수출이 국가 2의 수입과 같음을 의미

(b) $Y_1 = \frac{A_2 m_2 + A_1(1-c_2+m_2)}{D}, Y_2 = \frac{A_1 m_1 + A_2(1-c_1+m_1)}{D}$

(c) A_1 가 증가하면 Y_2 도 증가

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.2 3차 행렬식

1.

(a) -2

(b) -2

(c) adf

(d) $e(ad-bc)$

2.

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 7 & 13 & 13 \\ 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -2$$

$$|B| = 3$$

3.

(a) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$

(b) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

(c) $x = 1, y = 2, z = 3$

4.

증명 생략

5.

$$(a, b) = (3, -2), (a, b) = (-2, 3)$$

6.

$$x = -1, 5$$

7.

(a) $|A_t| = 2t^2 - 2t + 1$

증명 생략

(b) $A_t^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2t - 2t^2 & t - t^2 \\ 4t - 4 & 5t - 4 & -t^2 + 4t - 3 \\ 2 - 2t & t^2 - 4t + 3 & t^2 - 2t + 2 \end{pmatrix}$

$$t = 1$$

8.

$$Y = k(a - bd + A_0), \quad C = k\{a - bd + A_0 b(1 - t)\}, \quad T = k\{t(a + A_0) + (1 - b)d\}$$

단, $k = \frac{1}{1 - b(1 - t)}$

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.3 일반 행렬식

1.

(a) 24

(b) $d - a$

(c) 0

2.

증명 생략

3.

$+ a_{12} a_{23} a_{35} a_{41} a_{54}.$

4.

$- a_{15} a_{24} a_{32} a_{43} a_{51}$

5.

$x = 2$

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.4 행렬식의 기본법칙

1.

(a) $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 29 & 36 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 15 & 22 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}'\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 15 & 23 \\ 22 & 34 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}'\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 13 & 29 \\ 16 & 36 \end{pmatrix}$

(b) 증명 생략

(c) 증명 생략

2.

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

증명 생략

3.

(a) 0

(b) 0

(c) $x^4 - a_1x^3$

4.

$$|\mathbf{AB}| = -12, \quad 3|\mathbf{A}| = 9, \quad |-2\mathbf{B}| = 32, \quad |4\mathbf{A}| = 192, \quad |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = -1$$

$|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$ 는 정의되지 않는다.

5.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + 6 & a + 1 & a^2 + 4a - 12 \\ a^2 + 2a + 2 & 3 & 8 - 2a^2 \\ a - 3 & 1 & 13 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = a^2 - 3a + 2$$

6.

증명 생략

7.

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{X}'\mathbf{X}| = 10$$

8.

$$|\mathbf{A}_a| = a^2(a - 4), \quad |\mathbf{A}_1^6| = 729$$

9.

증명 생략

10.

증명 생략

11.

(a) 첫 번째 등호는 참이고, 두 번째 등호는 거짓

(b) 거짓

(c) 모두 참

(d) 참

12.

증명 생략

13.

증명 생략

14.

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.5 여인수 전개

1.

(a) 2

(b) 30

(c) 0

2.

(a) $-abc$

(b) $abcd$

(c) 360

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.6 역행렬

1.

증명 생략

2.

$$a = -\frac{3}{4}, \quad b = \frac{3}{4}$$

3.

$$(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

5.

$$(a) |\mathbf{A}| = 1, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - \mathbf{I}_3 = \mathbf{0}$$

(b) 증명 생략

$$(c) \mathbf{P} = \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.

$$(a) \mathbf{A}\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{A}\mathbf{A}'| = 89, \quad (\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1} = \frac{1}{89} \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -11 & 21 \end{pmatrix}$$

(b) 우연이 아니다.

7.

$$\mathbf{B}^2 + \mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}^3 - 2\mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

8.

증명 생략

9.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.7 역행렬의 일반 공식

1.

$$(a) \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) 없음

2.

$$\frac{1}{72} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{pmatrix}$$

3.

$$(I - A)^{-1} = \frac{5}{62} \begin{pmatrix} 18 & 16 & 10 \\ 2 & 19 & 8 \\ 4 & 7 & 16 \end{pmatrix}$$

4.

$k=r$ 일 때 해는 $x_1 = b_{1r}^*, x_2 = b_{2r}^*, \dots, x_n = b_{nr}^*$

5.

$$(a) A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(b) B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) 없음

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.8 크레이머 법칙

1.

(a) $x = 1, y = -2, z = 2$

(b) $x = -3, y = 6, z = 5, u = -5$

2.

$$x_1 = \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{10}b_2 - \frac{1}{5}b_3, x_2 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{10}b_2 + \frac{3}{5}b_3, x_3 = -\frac{1}{2}b_1 + \frac{7}{10}b_2 + \frac{2}{5}b_3$$

3.

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.9 레몬티에프 모형

1.

$$x_1 = 160, x_2 = 240, x_3 = 80$$

증명 생략

2.

$$(a) \frac{5}{6}x - \frac{1}{4}y = 60, -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y = 60$$

$$(b) x = 320/3, y = 1040/9$$

3.

(a) 각 재화는 그 자체의 생산에는 사용되지 않는다.

(b) 각 재화를 1단위씩 모두 생산하는 데 필요한 재화 i 의 총량

(c) 각 성분은 재화 j 를 1단위 생산하는 데 필요한 각 재화의 단위 수

(d) 상품은 대개 서로 다른 단위로 측정되기 때문에 경제적 의미는 없다.

4.

$$0.8x_1 - 0.3x_2 = 120, -0.4x_1 + 0.9x_2 = 90$$

$$\text{해} : x_1 = 225, x_2 = 200$$

5.

$$\begin{cases} 0.9x_1 - 0.2x_2 - 0.1x_3 = 85 \\ -0.3x_1 + 0.8x_2 - 0.2x_3 = 95 \\ -0.2x_1 - 0.2x_2 + 0.9x_3 = 20 \end{cases}$$

증명 생략

6.

$$\text{입력행렬} : \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{단, } \alpha < 1, \beta < 1, \gamma < 1)$$

7.

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.10 고윳값과 고유벡터

1.

(a) 고윳값 : $-1, -5$

고유벡터 : $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) 고윳값 : $5, -5$

고유벡터 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(c) 고윳값 : $2, 3, 4$

고유벡터 : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.11 대각화

1.

$$(a) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$(b) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} & \frac{3\sqrt{2}}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{pmatrix}$$

2.

$$(a) (1-\lambda)\{\lambda^2 + \lambda - 3(1+k)\} = 0$$

증명 생략

$$(b) k \geq -\frac{13}{12}, \quad k=3 \text{ 일 때의 고윳값} : -4, 1, 3$$

$$(c) \mathbf{P}'\mathbf{A}_3\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3.

증명 생략

4.

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.12 이차형식

1.

(a) 음의 정부호

(b) 양의 정부호

2.

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

3.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

(a) 양의 정부호

(b) 양의 정부호

(c) 음의 반정부호

(d) 음의 정부호

6.

7.

(i) $c_1 < c < c_2$

(ii) $c_1 \leq c \leq c_2$

(iii) $c < c_1$ 또는 $c > c_2$

8.

증명 생략

$|\mathbf{B}| \neq 0$

9.

증명 생략

10.

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

CHAPTER 13 복습문제

13.1

- (a) -4 (b) $1-a^2$
(c) $6a^2b+2b^3$ (d) $\lambda^2-5\lambda$

13.2

- (a) -4 (b) 1
(c) 1

13.3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

13.4

- (a) $t \neq -1$ (b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13.5

- (a) $|\mathbf{A}| = (p+1)(q-2)$, $|\mathbf{A} + \mathbf{E}| = 2(p-1)(q-2)$
(b) $p \neq 1$, $q \neq 2$
(c) 증명 생략

13.6

$t \neq 1, 8$

13.7

증명 생략

13.8

- (a) 증명 생략 (b) $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -3 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

13.9

$$\mathbf{X} = 2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C}, \mathbf{Y} = \mathbf{AC} - \mathbf{B}$$

13.10

- (a) 유일한 해 : $a \neq 1$, $a \neq 2$
불능 : $a = 1$
부정 : $a = 2$
(b) $a = 1$, $b_1 - b_2 + b_3 = 0$ 또는 $a = 2$, $b_1 = b_2$

13.11

- (a) $|\mathbf{A}| = -2$, $c = -1$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 9 & -\frac{11}{2} \end{pmatrix}$

- (b) 증명 생략

13.12

증명 생략

CHAPTER 13 행렬식과 이차형식

13.13

$$a(b-2) \neq 0 \text{ 일 때 } x = \frac{2b-2a+3}{a(b-2)}, y = \frac{2a+b-9}{b-2}, z = \frac{2ab-2a-2b-3}{a(b-2)}, u = \frac{7-2a}{b-2}$$

13.14

증명 생략

13.15

증명 생략

13.16

증명 생략

13.17

$$a \neq b \text{ 이면 } x = \pm \frac{1}{2}(a+b)$$

$a = b$ 이면 모든 x 에 대해 성립

13.18

증명 생략

13.19

증명 생략

13.20

증명 생략

13.21

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & -1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} & 0, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} & 2, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{(b)} & 0, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 1, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 3, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$